Pequenas Incursões da Física de Altas Energias na Física da Matéria Condensada

Ricardo C. Paschoal relatando parte de sua colaboração com o Prof. José Abdalla Helayël-Neto, em homenagem aos seus 60 anos.

CBPF, 08 de novembro de 2013

- **1ª Parte:**

  Uma Eletrodinâmica Clássica diferente: MCS2+1.

- **2ª Parte:**

  Eletrod. MCS não-mín e Férmions Compostos (Jain, EHQF): *PL* A313 (2003) 412.

- **3ª Parte:**

  Mecânica Quântica Supersimétrica Planar (*PL* A 349 (2006) 67; *PL* A 370 (‘07) 126; *IJTP* 46 (‘07) 2983).

- **4ª Parte:** Supersimetria no grafeno (*JHEP* 05 (2011) 1), gerando vórtices (arXiv:1308.2028).

I- Eletrodinâmica Clássica de MCS

A Eletrodinâmica Clássica de Maxwell-Chern-Simons é descrita pela seguinte densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\kappa A_\lambda - J_\mu A^\mu,$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e os índices gregos correndo de 0 a 2 (caso planar).

As correspondentes equações de campo são:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m\widetilde{F}^\nu = J^\nu, \qquad \partial_\nu \widetilde{F}^\nu = 0,$$

onde: $\widetilde{F}^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$, ou, em componentes:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} - mB = \rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \widetilde{\vec{\nabla}}B - m\widetilde{\vec{E}} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad \widetilde{F}^\mu = (-B, -E_y, E_x)$$

, com as definições:

$$A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A})$$

$$\tilde{a}_i \equiv \varepsilon_{ij}\, a_j \quad ,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(-\vec{A}_i) - \vec{\nabla}_i\Phi \equiv \vec{E}_i \\ B \equiv \vec{\nabla}\times\vec{A} \equiv \epsilon_{ij}\partial_i\vec{A}_j. \end{cases}$$

Como na Eletrodinâmica puro-Maxwell (m=0), aqui também a corrente se conserva,

$\partial_\nu J^\nu = 0$ (usando-se a equação de campo),

e a simetria de calibre se mantém: sob a transformação de calibre,

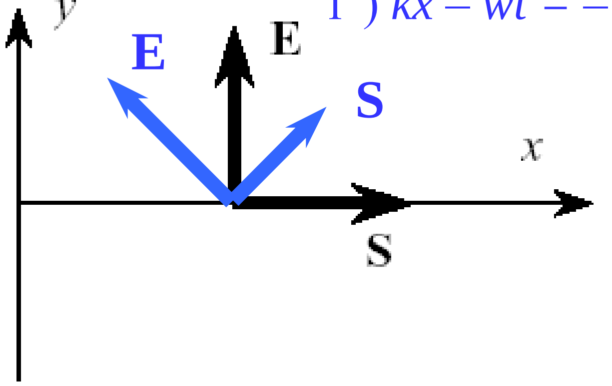
$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad ,$$

a variação da Lagrangeana é uma derivada total, $\delta\mathcal{L}_{MCS} = \partial_\mu(J^\mu \Lambda + \Lambda \epsilon^{\mu\kappa\lambda}\partial_\kappa A_\lambda)$ (usou-se a conservação da carga), deixando a ação invariante.

Ondas “planas” no vácuo:

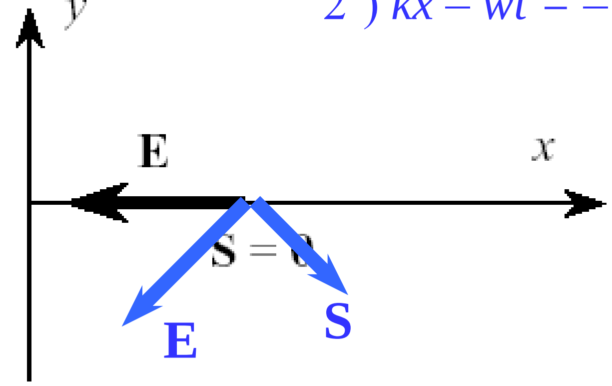
1) $kx - wt = 0$

1’) $kx - wt = -45^o$



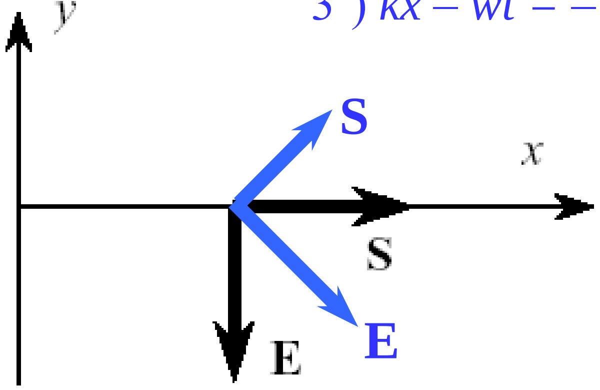
2) $kx - wt = -90^o$

2’) $kx - wt = -135^o$



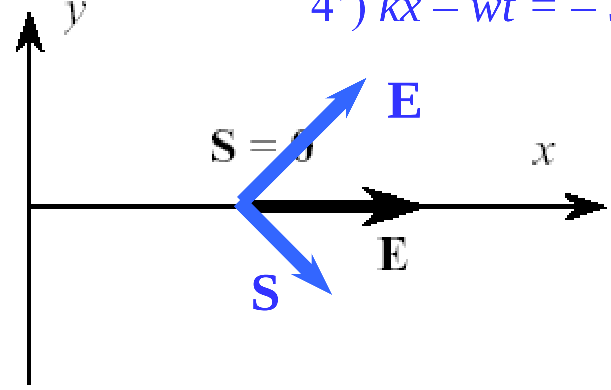
3) $kx - wt = -180^o$

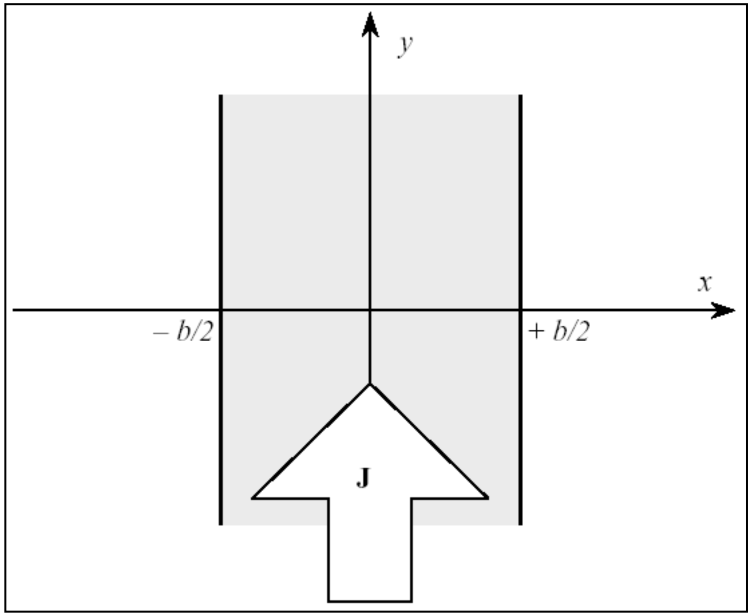
3’) $kx - wt = -225^o$



4) $kx - wt = -270^o$

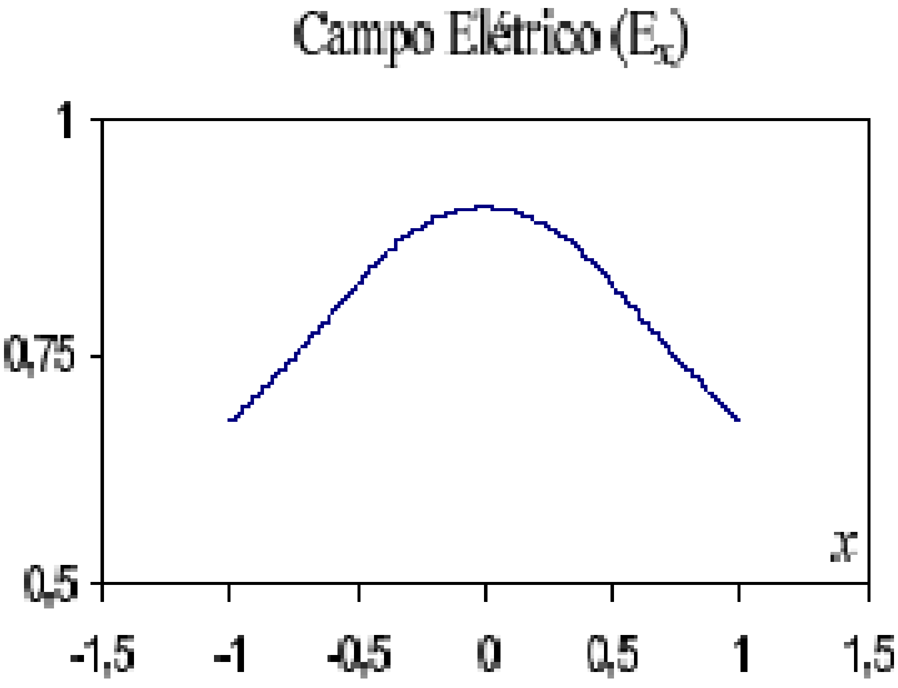
4’) $kx - wt = -315^o$

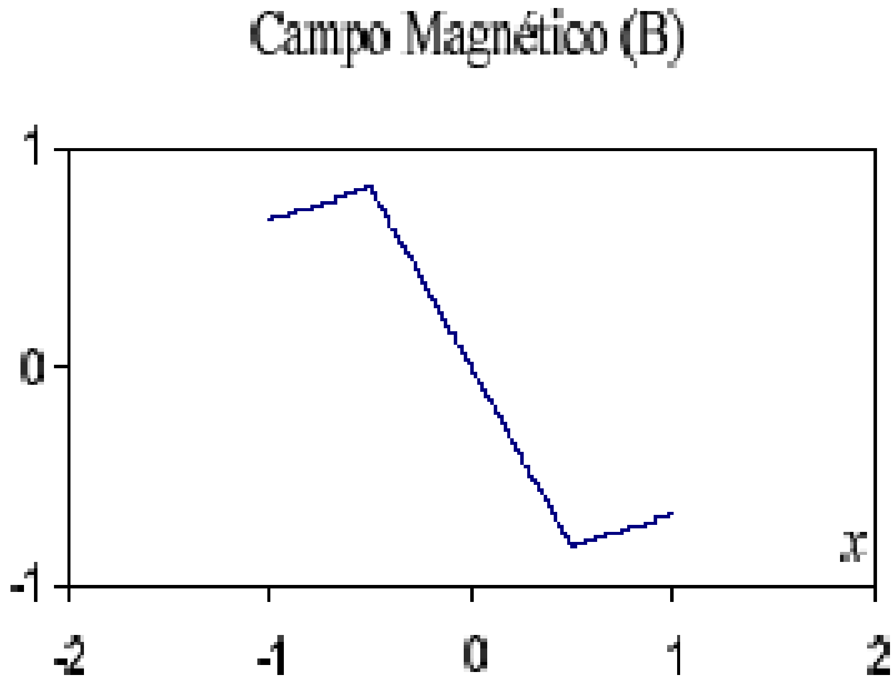




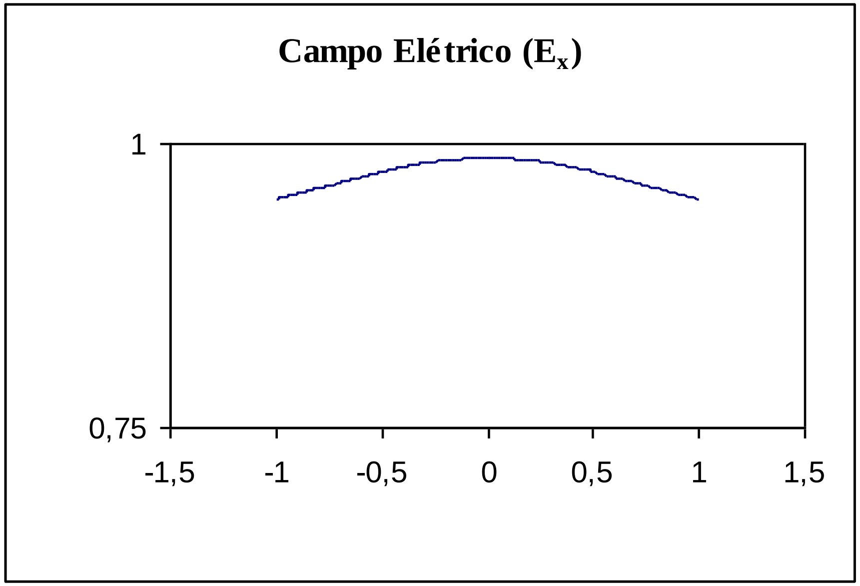
Uma fita conduzindo corrente estacionária uniformemente distribuída:

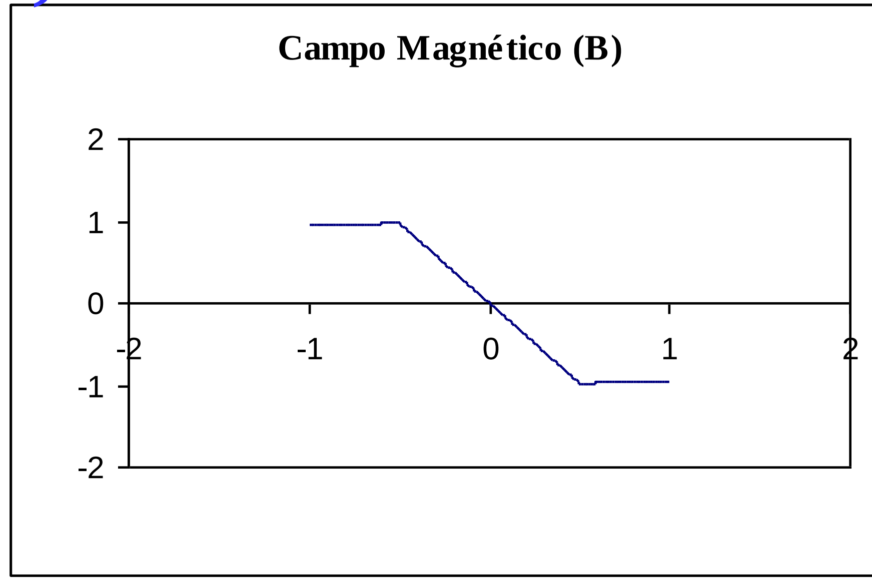
Para $b = 1$, $I = 2$ e $m = 0{,}4$:



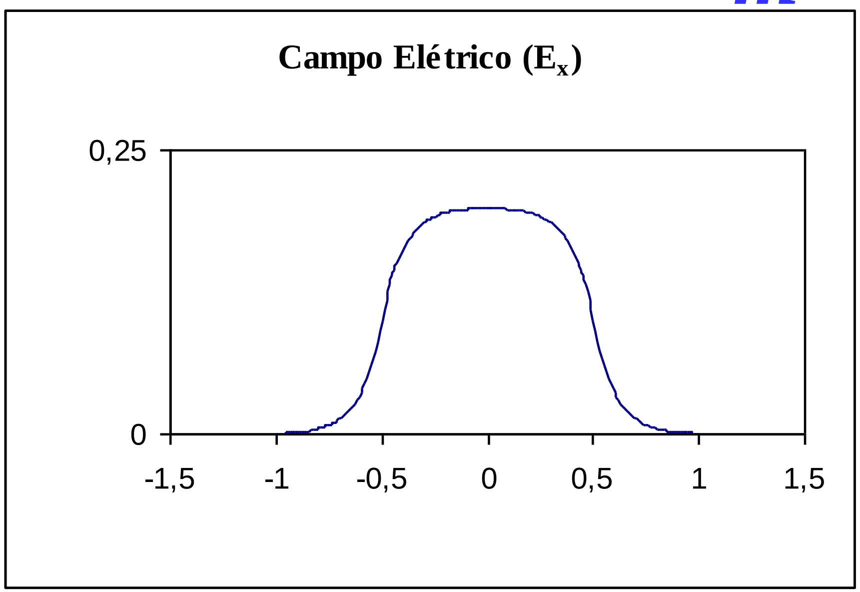


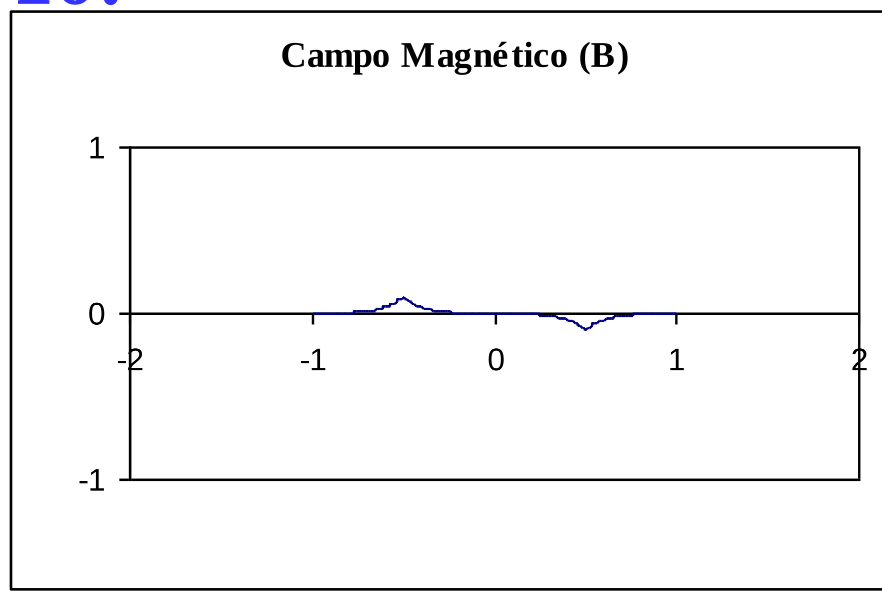
m = 0,05:


Campo Elétrico (E_x)
1
0,75
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5


Campo Magnético (B)
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2

m = 10:


Campo Elétrico (E_x)
0,25
0
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5


Campo Magnético (B)
1
0
-1
-2
-1
0
1
2

II- Conexão entre a teoria de MCS não-mínima e a de Férmions Compostos para o EHQF

Acoplamento não-mínimo em (2+1)D:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu + ig\widetilde{F}_\mu,$$

onde *g* faz o papel de um momento de dipolo magnético. O efeito na eq. de Schrödinger é:

$$\begin{cases} \Phi \to \Phi' = \Phi - \dfrac{g}{q}B \\ (\vec{A})_i \to (\vec{A}')_i = (\vec{A})_i - \dfrac{g}{q}\widetilde{E}_i, \end{cases}$$

que conduz a:

$$\begin{cases} B \to B' = B + \frac{g}{q}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) \\ \vec{E} \to \vec{E}' = \vec{E} + \frac{g}{q}\left(\vec{\nabla}B + \frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t}\right) \end{cases},$$

valendo um ac. <u>***mínimo***</u> para os novos campos.

O acopl. não-mínimo pode ter origem numa quebra da simetria de Lorentz (e CPT) em (3+1)D, dada por: $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu + i\frac{\gamma}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}v^\nu F^{\kappa\lambda}$, onde a escolha $\gamma v^\nu = (0, 0, 0, \gamma v^3)$ conduz exatamente às mesmas redefinições de campos mencionadas acima.

Conexão com os Férmions Compostos

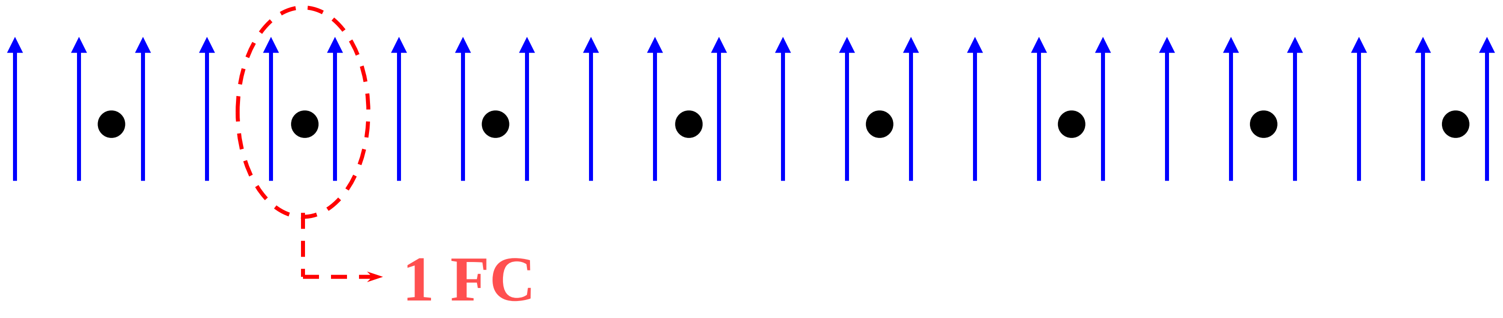
Em 1989, J.K. Jain propôs sua teoria de Férmions Compostos para descrever o EHQF. Basicamente,

1 FC = 1 (e^-) + um nº par de flúxons.

Assim, o campo magnético B^* visto por um FC é parte do B_0 que de fato está aplicado ao elétron.

P. ex., se 1FC = 1(e^-) + 2 flúxons:

$\boxed{B^*A = B_0A - 2N\phi_0}$, ϕ_0 = 1 flúxon = hc/e, A = área.



Considerando que:

- Em (2+1)D, a unidade de momento de dipolo magnético é igual à de fluxo magnético;
- Conseqüentemente, há a seguinte analogia:
  a partícula com carga q e dipolo g do ac. não-mínimo está para a partícula de carga q e g =0 do acopl. mínimo, assim como um FC está para um elétron;

Foi proposto que: $\boxed{B' = B_0}$ e $\boxed{B = B^*}$.

O resultado interessante é que, com **E** e B governados pelas eqs. de MCS e admitindo $\rho = 0$, $\partial_t = 0$ e B uniforme, tal proposta conduz naturalmente a $|g| = 2n\phi_0$ (n = inteiro).

III- Mecânica Quântica Supersimétrica Planar

Usando supercampos, demonstrou-se que, sob a condição $gB(x,y) = q\Phi(x,y)$,

a MQ planar não-minimamente acoplada a um campo de calibre (eq. Pauli planar e não-mínima) mantém a SUSY-N=2 do caso mínimo. Além disso, se o campo de calibre é de MCS, então, no vácuo, a condição $gm/q = 1$ garante que o fator giromagnético (efetivo) seja igual a 2.

Tal fator giromagnético efetivo emerge naturalmente do respectivo Hamiltoniano,

$$H_1 = \frac{\left(\vec{p} - q\vec{A} + g\tilde{\vec{E}}\right)^2}{2M} - \frac{qB}{2M}\sigma_3 - \frac{g(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}{2M}\sigma_3,$$

bastando, para isso, substituir $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - mB = \rho$

(com $\rho = 0$) para obter:

$$H_1 = \frac{\left(\vec{p} - q\vec{A} + g\tilde{\vec{E}}\right)^2}{2M} - \frac{q\sigma_3}{2M}\underbrace{\left(1 + \frac{gm}{q}\right)}_{\text{Fator giromagnético efetivo}} B.$$

Uma interação mais geral

A linguagem de supercampos permitiu inferir uma interação mais geral, que, na superação, é:

$$\int dtd\theta\,\Gamma(\phi) + \int dtd\bar{\theta}\,\bar{\Gamma}(\bar{\phi}),$$

onde Γ é um campo externo Grassmanniano. Tal interação só não se anula para uma eq. de Pauli com 4 componentes, no mínimo (como no grafeno!):

$$H_2 = \frac{\left(\vec{p} - q\vec{A} + g\tilde{\vec{E}}\right)^2}{2M} - \frac{qB}{2M}\sigma_3 \otimes \mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{g(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}{2M}\sigma_3 \otimes \mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{2}{\sqrt{M}}G(z,\bar{z}),$$

onde G é (Leo Ospedal retomou em 2013):

$$G(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & -f(z) & 0 & -h(z) \\ -\bar{f}(\bar{z}) & 0 & \bar{f}^2(\bar{z})/\bar{h}(\bar{z}) & 0 \\ 0 & f^2(z)/h(z) & 0 & f(z) \\ -\bar{h}(\bar{z}) & 0 & \bar{f}(\bar{z}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Possíveis interpretações para *G*:

- Campo externo pseudo-clássico do tipo-fotino (análogo a um campo externo clássico tipo-fóton);
- Interação de uma partícula de spin-3/2.
- Interações no grafeno (devido à dim 4x4).

MQS2+1 e Integrabilidade

- Área pouco estudada (TC ou MQ/MC): SUSY estabiliza teorias caóticas não-susy'cas?
- Modelo estudado: YM SU(2), campos uniformes, reduzida dim c/ dado ansatz p/ pots de gauge, portanto, de no máx 4ª ordem, simét paridade:
- Resultado: a restrição que SUSY impõe no espaço de parâmetros é mais severa no setor não integrável do que no integrável (à la Painlevé).

$$V = C_1x^4 + C_2y^4 + C_5x^2y^2 + C_7y^3 + C_8x^2y + C_{10}x^2 + C_{11}y^2.$$

- Mostrou-se também que o caso não integrável pode exibir tanto caos quanto regularidade.

IV- SUSY e Vórtices no grafeno

- Teoria de calibre quiral de Jackiw et al. (2007) p/ grafeno foi supersimetrizada p/ N=1 e N=2).
- Grafeno: elétrons = férmions de Dirac 4 comps sem massa em 2+1; deformações da rede = campos de gauge + campos escalares. SUSY?
- Caso N=2: solução de vórtice obtida via ação nula de uma das supersimetrias e apresentando (alguns) parceiros supersimétricos extras nulos. Paridade R = simetria global de carga elétrica.

- Modelo de Jackiw et al. (gera gap de massa p/ e^-):

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HCM-JP}} = \overline{\psi}_+ \gamma^\mu (iD^+_\mu)\psi_+ + \overline{\psi}_- \gamma^\mu (iD^-_\mu)\psi_- - g\varphi\overline{\psi}_+\psi_- - g\varphi^*\overline{\psi}_-\psi_+$$

- Simetrias: U(1) quiral, carga elét global, paridade.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{3D,N=2} &= \int d^3x d\bar{\theta}_- d\theta_+ \ (\frac{-1}{32})\overline{\mathcal{W}}_- \mathcal{W}_+ \ + \\ &+ \int d^3x d\bar{\theta} d\theta d\bar{\tau} d\tau \left\{ -\frac{1}{16} \left(\overline{\Phi} e^{2h\mathcal{V}} \Phi + \overline{\Psi} e^{2h\mathcal{V}} \Psi + \overline{\Omega}\, e^{-2h\mathcal{V}} \Omega \right) \right\} + \\ &+ \int d^3x d\bar{\theta}_- d\theta_+ \ \left(2g\,\Phi\,\Psi\,\Omega^2\right) \ + \int d^3x d\bar{\theta}_+ d\theta_- \ \left(2g\,\overline{\Phi}\,\overline{\Psi}\,\overline{\Omega}^2\right)\end{aligned}$$

$$\theta_\pm \equiv \theta \pm i\tau \qquad \Phi_{3D} = e^{(-\frac{i}{2}\bar{\theta}_- \gamma^\mu \theta_- \partial_\mu)} \left(\varphi + \frac{1}{2}\bar{\theta}_- X_+ + \frac{1}{2}\bar{\theta}_- \theta_+ S \right)$$

$$\overline{\Phi}_{3D} = e^{(-\frac{i}{2}\bar{\theta}_+ \gamma^\mu \theta_+ \partial_\mu)} \left(\varphi^* + \frac{1}{2}\bar{\theta}_+ X_- + \frac{1}{2}\bar{\theta}_+ \theta_- S^* \right)$$

$$\Psi_{3D} = e^{(-\frac{i}{2}\bar{\theta}_-\gamma^\mu\theta_-\partial_\mu)}\left(\rho + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-\psi_+ + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-\theta_+ P\right)$$

$$\Omega_{3D} = e^{(-\frac{i}{2}\bar{\theta}_-\gamma^\mu\theta_-\partial_\mu)}\left(\phi + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-\kappa_+ + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-\theta_+ M\right) \qquad \text{etc.}$$

Em componentes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{N=2}_{MCS} = & \int d^3x \Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\Delta^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu N \partial^\mu N + hv^2\Delta + \\
& + \frac{1}{2}\bar{\Lambda}_-(i\partial\!\!\!/ + m)\Lambda_- + \big[(D_{+\mu}\varphi)(D^\mu_+\varphi)^* + (D_{+\mu}\rho)(D^\mu_+\rho)^* + (D_{-\mu}\phi)(D^\mu_-\phi)^* + \\
& - (h^2N^2 - 2h\Delta)\,\varphi\varphi^* - (h^2N^2 - 2h\Delta)\,\rho\rho^* - (h^2N^2 + 2h\Delta)\,\phi\phi^* + |S|^2 + |P|^2 + |M|^2 \\
& + \frac{1}{4}(hN)\,\bar{X}_+X_+ + \frac{1}{4}(hN)\,\bar{\psi}_+\psi_+ + \frac{1}{4}(hN)\,\bar{\kappa}_+\kappa_+ \\
& + \frac{i}{8}(\bar{X}_-D\!\!\!\!/_-X_- + \bar{X}_+D\!\!\!\!/_+X_+) + \frac{i}{8}(\bar{\psi}_-D\!\!\!\!/_-\psi_- + \bar{\psi}_+D\!\!\!\!/_+\psi_+) + \frac{i}{8}(\bar{\kappa}_-D\!\!\!\!/_+\kappa_- + \bar{\kappa}_+D\!\!\!\!/_-\kappa_+) \\
& - \frac{h}{2}\left[(\varphi\bar{\Lambda}_+X_- + \varphi^*\bar{X}_-\Lambda_+) + (\rho\bar{\Lambda}_+\psi_- + \rho^*\bar{\psi}_-\Lambda_+) - (\phi\bar{\Lambda}_+\kappa_- + \phi^*\bar{\kappa}_-\Lambda_+)\right]\Big] \\
& + g\Big[\rho\varphi(\bar{\kappa}_-\kappa_+) + 2\phi\varphi(\bar{\psi}_-\kappa_+) + 2\rho\phi(\bar{X}_-\kappa_+) + \underbrace{\phi^2(\bar{\psi}_-X_+)}_{\text{J-P's Yukawa int.}} + \\
& - 4(2M\phi\varphi\rho + P\varphi\phi^2 + S\rho\phi^2) + h.c.\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$$D_{+\mu}(\varphi,\rho) \equiv (\partial_\mu + ihA_\mu)(\varphi,\rho)$$

- A variação nula dos campos fermiônicos em relação a uma das supersimetrias conduz às Eqs de Bogomol'nyi, que são satisfeitas se:

  $\rho = \varphi = 0$ e ϕ livre.

- Eqs Bogomol'nyi restantes:

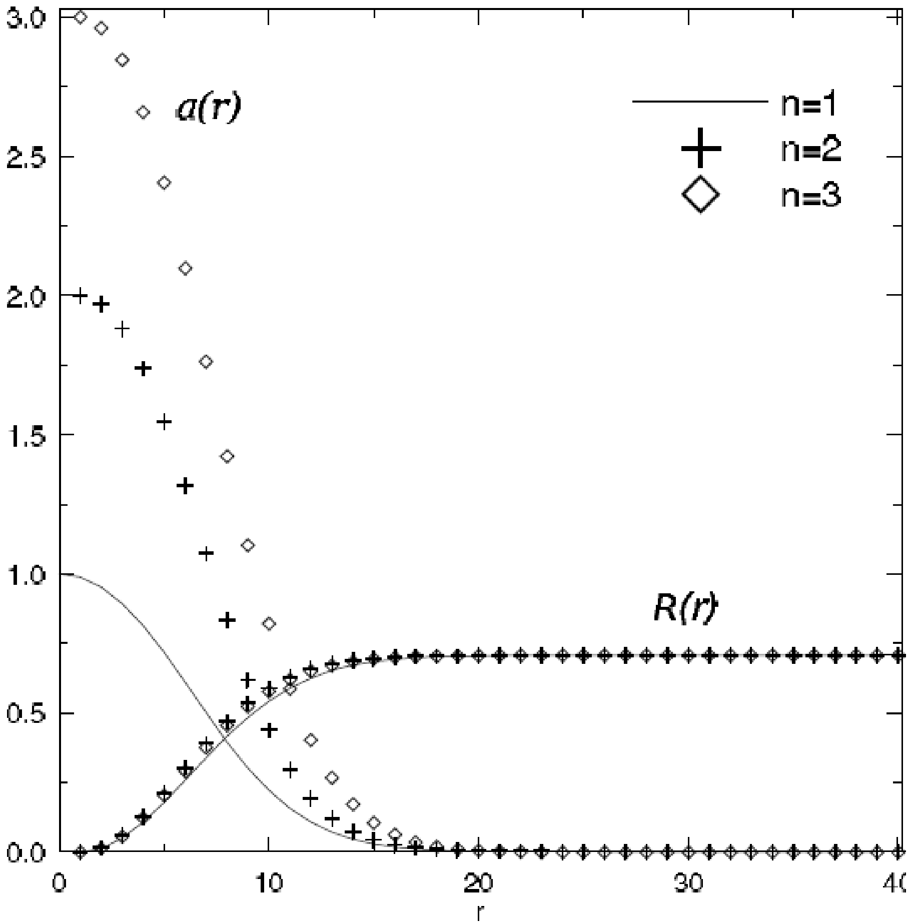
$$B \pm \frac{h}{2}\left(+2|\phi|^2 - v^2\right) = 0 \qquad \left(D_{-1} \mp i D_{-2}\right)\phi = 0$$

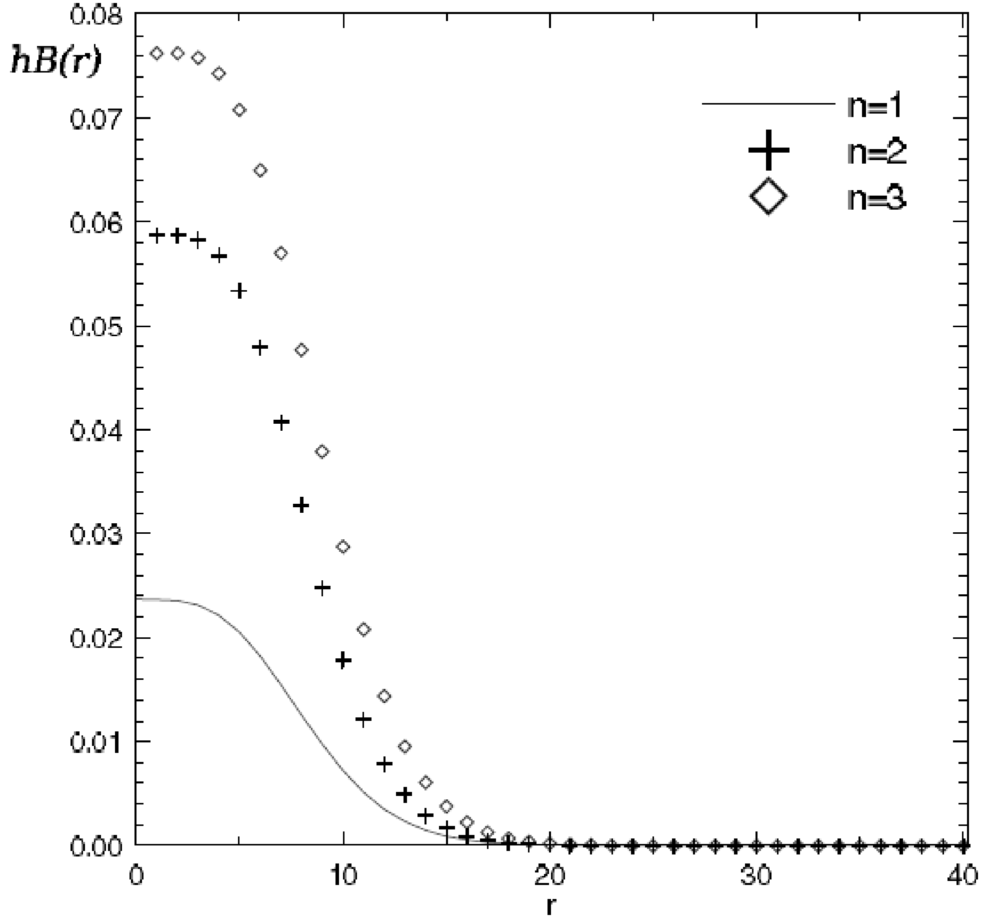
- Vortex ansatz:

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta) &= v\,R(r)e^{in\theta}\,, \\ \mathbf{A} &= -\frac{\hat{\theta}}{hr}\left[a(r) - n\right]\,. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{dR}{dr} \pm \frac{a}{r}R &= 0\,, \\ \frac{1}{r}\frac{da}{dr} \mp \frac{h^2v^2}{2}(2R^2 - 1) &= 0\,. \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow$ fluxo é quantizado e ...





<u>Agradecimentos</u>: aos parceiros (supersimétricos ou não) dos trabalhos citados: Helayël, “Coronel”, Thales, Humberto, Marcos Tadeu, Everton, Marquinho e Álvaro.

Conclusões e Sugestões para futuros trabalhos:

- É muito bom e uma grande honra trabalhar com o Prof. Helayël!
- Qualquer trabalho futuro será bom!

Parabéns ao Helayël, pelos 60 anos de vida, sobretudo por ser como é sua vida!!! Mais 60 à frente, no mínimo! Obrigado, JAHN, por tudo que tem feito por mim e pela sociedade Brasileira!